TROESCH PROBLEMİNİN PERTURBASYON İTERASYON YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

M. Mustafa Bahşı [1], Mehmet Çevik[2]
[1] Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Kırkağaç Meslek Yüksekokulu, Manisa
[2]İzmir Katip Çelebi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, İzmir

ABSTRACT

In this study, perturbation iteration method (PIA) is used for numerical solution of Troesch equation. The method was developed based on the number of Taylor series derivation and the number of correction terms on straightforward opening. One of the important advantages of the method over other known perturbation methods is that it does not require a small perturbation parameter. This feature of the method is the most important reason for studying the problem. Another important advantage of the method is that because it is a combination of iteration and perturbation methods, numerical solutions of the applied problem can be found effective and fast. The numerical results obtained by the perturbation iteration method are compared with other results known in the literature. The effect of the method on the solution of the Troesch equation was investigated with the help of the results. MATLAB symbolic software is used to implement the method and to find numerical solutions.

ÖZET

Bu çalışmada Troesch denkleminin sayısal çözümü için perturbasyon iterasyon yöntemi (PIA) kullanılmıştır. Yöntem Taylor seri açılımındaki türevin mertebesi ve yaya açılımındaki düzeltme teriminin sayısına bağlı olarak geliştirilmiştir. Yöntemin diğer bilinen perturbasyon yöntemlerine göre önemli avantajlarından birisi küçük perturbasyon parametresi zorunluluğu olmamasıdır. Yöntemin bu özelliği problemin incelenmesi için en önemli nedendir. Yöntemin bir diğer önemli avantajı ise iterasyon ve perturbasyon yöntemlerinin birleşimi olmasından dolayı uygulanılan problemin sayısal çözümlerinin etkili ve hızlı bulunmasını sağlamasıdır. Perturbasyon iterasyon yöntemi ile bulunan sayısal sonuçlar literatürde bilinen diğer sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bulunan sonuçlar yardımıyla yöntemin Troesch denkleminin çözümündeki etkinliği incelenmiştir. Yöntemin uygulanmasında ve sayısal çözümlerin bulunmasında MATLAB sembolik yazılımı kullanılmıştır.

GİRİŞ

Bu çalışmada, Troesch probleminin sayısal çözümlerinin bulmak için perturbasyon iterasyon yöntemi sunulmuştur. Bu yöntem birçok araştırmacı tarafından farklı denklemlere uygulanmıştır. Perturbasyon iterasyon yöntemi ilk olarak cebirsel denklemler için kök bulma algoritması olarak sunulmuş [1] ve sonrasında yüksek dereceli denklemler için yöntem geliştirilmiştir [2, 3]. Daha sonra yöntem, Bratu tipi [4] diferansiyel denklemler ve Fredholm ve Volterra tipi integral denklemlere [5] uygulanmıştır. Ayrıca Pentograf tipi gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü elde etmek için perturbasyon-iterasyon algoritmaları geliştirilmiştir [6]. Diğer taraftan optimizasyon teknikleri kullanılarak Bratu ve pantograf denklemlerinin bulunan perturbasyon iterasyon çözümleri iyileştirilmiştir [7, 8]. Bu çalışmada lineer olmayan iki nokta sınır değer problemi olan Troesch problemini ele alınacaktır. Bu problem gaz gözenekli elektrotlar teorisinde [8, 9] ve bir plazma kolonunun radyasyon basıncı ile kaplanmasının araştırılmasında ortaya çıkmıştır [10, 11].

Troesch problemi

$$u'' = \mu \sinh(\mu u), \qquad u(0) = 0, \qquad u(1) = 1$$

μ pozitif sabit olmak üzere tanımlanır [12]. Troesch probleminin sayısal çözümünü bulmak için Lie-grup yöntemi [12], Green fonksiyonlarına dayalı PGEM ve MGEM yöntemleri [13], sinc-sıralama yöntemi [14], ayrıştırma yöntemi [15], homotopi perturbasyon yöntemi [16], B-spline yöntemi [17] ve varyasyonel iterasyon yöntemi [18] araştırmacılar tarafından sunulan bazı yöntemlerdir.

PERTURBASYON-İTERASYON ALGORİTMASI

Perturbasyon-iterasyon algoritmaları, PIA(n, m) olarak tanımlanır. Burada, n perturbasyon açılımındaki düzeltme terimi sayısını ve m ise Taylor seri açılımındaki türevin mertebesini tanımlar. Genellikle $n \leq m$ dir, aksi halde düzeltme terimi hesaplanamaz.

Bu çalışmada PIA$(1,1)$ algoritması geliştirilmiştir. Troesch problemini kapsayan ikinci mertebe diferansiyel denklemin kapalı formdaki en genel hali aşağıda verilmiştir.

$$F(u'', u', u, \varepsilon, x) = 0$$

Burada $u = u(x)$ ve ε perturbasyon parametresidir. Bu denklem Troesch problemi gibi birçok araştırmacı tarafında ele alınan problemlerin tamamını kapsadığından dolayı bu denklem için algoritma geliştirilmiştir. PIA$(1,1)$ algoritmasında, perturbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor açılımında birinci mertebe türev için açılım yapılmıştır, yani $n = 1$ ve $m = 1$ dir. Ele alınan denklemin verilen $u(x)$ fonksiyonuna bir düzeltme terimli direk açılımı her bir iterasyon için uygularsak

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon (u_c)_n$$

eşitliği elde edilir. Burada $(u_c)_n$ perturbasyon-iterasyon algoritmasının n. düzeltme terimidir. Daha sonra direk açılım denklemi kapalı formdaki denklemde yerine konur ve birinci mertebe türeve göre Taylor'a açılırsa

$$F(u_n'', u_n', u_n, 0, x) + F_{u'}(u_n'', u_n', u_n, 0, x)\varepsilon(u_c'')_n + F_{u'}(u_n'', u_n', u_n, 0, x)\varepsilon(u_c')_n$$
$$+ F_u(u_n'', u_n', u_n, 0, x)\varepsilon(u_c)_n + F_\varepsilon(u_n'', u_n', u_n, 0, x)\varepsilon = 0$$

denklemi elde edilir. Burada $(\,)'$ bağımsız değişkene göre türevi tanımlar ve

$$F_{u''} = \frac{\partial F}{\partial u''}, F_{u'} = \frac{\partial F}{\partial u'}, F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, F_\varepsilon = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$$

olarak elde edilir. Tüm türevler $\varepsilon = 0$ da bulunmuştur. Bulunan bu denklemi aşağıdaki gibi daha sade formda yazılabilir.

$$F_{u''}(u_c'')_n + F_{u'}(u_c')_n + F_u(u_c)_n = -F_\varepsilon - \frac{F}{\varepsilon}$$

Başlangıç fonksiyonu u_0 ile başlayıp, bulunsan PIA(1,1) algoritması kullanılarak $(u_c)_0$ düzeltme terimi bulunup buradan da direk açılım ile u_1 birinci iterasyon çözümü bulunur. İterasyona devam edilerek aranan sayısal hassasiyette çözüm bulunur.

SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan Troesch probleminin

$$u'' - \mu\sinh(\mu u) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 1$$

denklemin tam çözümü $u(x) = \frac{2}{\mu}sinh^{-1}\left\{\frac{u'(0)}{2}Sc\left(\mu x \left|1 - \frac{1}{4}[u'(0)]^2\right|\right)\right\}$ dir [14].

Burada u fonksiyonunun $x = 0$ daki türevi $\frac{\sinh(\frac{\mu}{2})}{\sqrt{1-m}} = Sc(\frac{\mu}{m})$ denkleminin çözümü ile bulunan m ye bağlı olarak $u'(0) = 2\sqrt{1-m}$ olarak verilmiştir.

Ayrıca $Sc(\frac{\mu}{m})$ Jacobi eliptik fonksiyonu $Sc\left(\frac{\mu}{m}\right) = \frac{sin\phi}{cos\phi}$ ile tanımlanmış ve $\mu = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-msin^2\theta}}d\theta$ dır.

Denklem ε suni parametresi ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$u'' - \mu\sinh(\varepsilon\mu u) = 0$$

burada $\varepsilon = 1$ perturbasyon parametresi olarak kabul edilmiştir PIA(1,1) algoritmasında verilen terimler:

$$F_{u''} = 1, \qquad F_u = 0, \qquad F_\varepsilon = -\mu^2 u_n, \qquad F = u''_n$$

olarak bulunur. Tüm bu terimler PIA(1,1) algoritmasında yazılırsa;

$$(u_c')_n = \mu^2 u_n - u''_n$$

iterasyon formülü elde edilir. Denklemin koşullarını sağlayan açık çözüm başlangıç fonksiyonu

$$u_0 = x$$

olarak seçilir ve iterasyon formülüne uygulanırsa, $\mu = 0.5$ için sayısal çözümler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1 = \frac{1}{24}x^3 + \frac{23}{24}x$$

$$u_2 = \frac{1}{1920}x^5 + \frac{23}{576}x^3 + \frac{5527}{5760}x$$

$$u_3 = \frac{1}{322560}x^7 + \frac{23}{46080}x^5 + \frac{5527}{138240}x^3 + \frac{185701}{193536}x$$

$$u_4 = \frac{1}{92897280}x^9 + \frac{23}{7741440}x^7 + \frac{5527}{11059200}x^5 + \frac{185701}{4644864}x^3 + \frac{49520309}{51609600}x$$

$$\vdots$$

$\mu = 0.5$ için 8 iterasyon yapılarak PIA(1,1) algoritması ile elde edilen sayısal çözümünün Sinc-collocation [14] ve varyasyonel iterasyon yöntemi [18] ile karşılaştırılması Çizelge 1' de verilmiştir.

Çizelge 1. Perturbasyon-iterasyon çözümünün, Sinc-collocation ve VIM yöntemleri ile elde edilen çözümlerin karşılaştırılması

	Tam Çözüm	Sinc-collocation	VIM	PIA
0.1	0.0951769	0.0959443	0.1000416	0.0959917
0.2	0.1906338	0.1921287	0.2003336	0.1922234
0.3	0.2866534	0.2887944	0.3011275	0.2889358
0.4	0.3835229	0.3861848	0.4026773	0.3863707
0.5	0.4815373	0.4845471	0.5052411	0.4847718
0.6	0.5810019	0.5841332	0.6090820	0.5843850
0.7	0.6822351	0.6852011	0.7144698	0.6854595
0.8	0.7855717	0.7880165	0.8216826	0.7882479
0.9	0.8913669	0.8928542	0.9310084	0.8930075

$\mu = 1$ için 8 iterasyon yapılarak PIA(1,1) algoritması ile elde edilen sayısal çözümünün Sinc-collocation [14] ve ayrıştırma [15] ile karşılaştırılması Çizelge 2' de verilmiştir.

Çizelge 2. Perturbasyon-iterasyon çözümünün, Sinc-collocation ve ayrıştırma yöntemleri ile elde edilen çözümlerin karşılaştırılması

	Tam Çözüm	Sinc-collocation	Ayrıştırma	PIA
0.1	0.08179699	0.08466125	0.08492528	0.08523370
0.2	0.16453087	0.17017135	0.17067908	0.17132045
0.3	0.24916736	0.25739390	0.25810502	0.25912183
0.4	0.33673220	0.34722280	0.34807811	0.34951660
0.5	0.42834716	0.44059983	0.44152329	0.44340944
0.6	0.52527416	0.53853439	0.53943772	0.54174007
0.7	0.62897114	0.64212860	0.64291809	0.64549262
0.8	0.74116837	0.75260809	0.75319489	0.75570548
0.9	0.86397002	0.87136251	0.87167571	0.87348169

PIA(1,1) algoritması ile elde edilen sonuçlar diğer bilinen yöntemler ile karşılaştırıldığında elde edilen sonuçların nispeten iyi ya da diğer çözümlerin hatalarına yakın olduğu görülmüştür. Çözümler MATLAB sembolik yazılımı yardımıyla elde edilmiştir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Troesch probleminin sayısal çözümünü elde etmek için yeni bir perturbasyon-iterasyon yöntemi geliştirilmiştir. PIA(1,1) algoritması ele alınan problemde bilinen bazı yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vermiştir.

Yöntemin asıl avantajı ise keyfi perturbasyon parametresi kullanılmasıdır. Bir başka deyişle küçük perturbasyon parametresi ihtiyacı olmamasıdır. MATLAB sembolik programı yardımıyla çözümler hızlı şekilde bulunmuştur.

Yöntem ilerleyen çalışmalarda perturbasyon açılımındaki düzeltme terimi sayısı ve Taylor seri açılımındaki türevin mertebesine bağlı olarak yeni algoritmalar geliştirilebilir olduğu ön görülmüştür. Ayrıca problemin iterasyon sayısının artırılması ile çözümlerin iyileşmesinde yavaşlama görülmüştür. Bunu için son birkaç yılda geliştirilen optimal perturbasyon iterasyon algoritmaları geliştirilerek sorun çözülebilecektir.

KAYNAKLAR

[1] M. Pakdemirli, H. Boyacı, Generation of root finding algorithms via perturbation theory and some formulas. *Applied Mathematics and Computation*. 184 (2007) 783-788.

[2] M. Pakdemirli, H. Boyacı, H.A. Yurtsever, Perturbative derivation and comparisons of root-finding algorithms with fourth order derivatives. *Mathematical and Computational Applications*. 12 (2007) 117-124.

[3] M. Pakdemirli, H. Boyacı, H.A. Yurtsever, A root finding algorithm with fifth order derivatives. *Mathematical and Computational Applications*. 13 (2008) 123-128.

[4] Y. Aksoy, M. Pakdemirli, New perturbation-iteration solutions for Bratu-type equations. *Computer Mathematics with Applications*. 59 (2010) 2802-2808.

[5] İ.T. Dolapçı, M. Şenol, M. Pakdemirli, New perturbation iteration solutions for Fredholm and Volterra integral equations. *Hindawi Journal Applied Mathematic*. (2013) Article ID 682537.

[6] M.M. Bahşı, M. Çevik, Numerical solution of pantograph-type delay differential equations using perturbation-iteration algorithms. *Journal of Applied Mathematics*. (2015).

[7] N. Bildik, S. Deniz, A new efficient method for solving delay differential equations and a comparison with other methods. *The European Physical Journal Plus*. 132(1) (2017) 51.

[8] S. Deniz, N. Bildik, Optimal perturbation iteration method for Bratu-type problems. *Journal of King Saud University-Science*. (2016).

[9] V.S. Markin,, A.A. Chernenko, , Y.A. Chizmadehev, , Y.G. Chirkov,Aspects of the theory of gas porous electrodes. In: Bagotskii, V.S., Vasilev, Y.B. (eds.) Fuel Cells: Their Electrochemical Kinetics, 21– 33. Consultants Bureau, New York (1966).

[10] D. Gidaspow, B. S. Baker, A model for discharge of storage batteries. *J. Electrochem. Soc.* 120 (1973) 1005–1010.

[11] E. S. Weibel, On the confinement of a plasma by magnetostatic fields. *Phys. Fluids.* 2(1), (1959) 52–56.

[12] M.S. Hashemi, S. Abbasbandy, A geometric approach for solving Troesch's problem. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. 40(1) (2017) 97-116.

[13] H. Q. Kafri, S. A. Khuri, A. Sayfy. A new approach based on embedding Green's functions into fixed-point iterations for highly accurate solution to Troesch's problem. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 17(2) (2016) 93-105.

[14] M. El-Gamel, Numerical solution of Troesch's problem by sinc-collocation method. *Applied Mathematics*. 4(4) (2013) 707.
[15] E. Deeba, S.A. Khuri, S. Xie, An algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Computational Physics*. 159(2) (2000) 125-138.
[16] X. Feng, L. Mei, H. Guoliang, An efficient algorithm for solving Troesch's problem. *Applied Mathematics and Computation*. 189(1) (2007) 500-507.
[17] S. A. Khuri, A. Sayfy. Troesch's problem: A B-spline collocation approach. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(9) (2011) 1907-1918.
[18] S. Chang, A Variational Iteration Method for Solving Troesch's Problem. *Journal of Computational and Applied Matematics*. 234(10), 2010, 3043-3047.